Total number of printed pages–8

23R–25 (MAT3104C)

2025

MATHEMATICS

(MAJOR)

Paper : MAT3104C

(Ordinary Differential Equation)

Full Marks : 45

Time : Two hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×4=4

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Write the standard form of Bernoulli's differential equation.

ৱাৰ্ণলিৰ (Bernoulli's) প্ৰামাণিক সমীকৰণটো লিখা।

(b) Determine the constant A such that the equation

$(x^2 + 3xy)\,dx + (Ax^2 + 4y)\,dy = 0$ is exact.

$$\left(x^2 + 3xy\right) dx + \left(Ax^2 + 4y\right) dy = 0$$

সমীকৰণটো যথাৰ্থ হ'লে ধ্ৰুবক A ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) What is the complementary function $(C.F)$ of the differential equation $\left(D^3 + 3D^2 + 3D + 1\right) y = e^{-x}$?

$\left(D^3 + 3D^2 + 3D + 1\right) y = e^{-x}$ অৱকল সমীকৰণটোৰ $(C.F)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Write the general solution of the differential equation $y = px + p^2$.

$y = px + p^2$ অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

2. Answer the following questions : 2×3=6

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve (সমাধান কৰা) ঃ

$$dx + dy = \left(x + y\right)^2 dx$$

(b) Solve (সমাধান কৰা) $\left(D^2 - 5D + 6\right) y = 0$

where (য'ত) $D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

(c) Find the particular integral (P.I) of the differential equation

$$\left(D^2 - 2D + 1\right) y = xe^{3x}.$$

$\left(D^2 - 2D + 1\right) y = xe^{3x}$ অৱকল সমীকৰণটোৰ (P.I) উলিওৱা।

3. Answer the following questions : 5×3=15

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Reduce the differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ to linear form. Also write the integrating factor and hence obtain the solution.

$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ অৱকল সমীকৰণটোৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণত প্ৰকাশ কৰা আৰু অনুকলন উৎপাদক লিখা। সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(b) Solve $(px - y)(py + x) = h^2 p$ using the transformation $x^2 = u$ and $y^2 = v$.

$x^2 = u$, আৰু $y^2 = v$ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

$$(px - y)(py + x) = h^2 p$$

Or / (বা)

(c) Obtain the general and singular solution of the differential equation.

$$y = px + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$$

$y = px + \sqrt{b^2 + a^2 p^2}$ অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান আৰু একক সমাধান উলিওৱা।

(d) Solve the initial value problem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}; \quad y(1) = 2$$

তলৰ আদি মান যুক্ত সমীকৰণটো সমাধান কৰা

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}; \quad y(1) = 2$$

(e) Solve (সমাধান কৰা) ঃ

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

4. Answer **either** (a) **or** (b). 5+5=10

(a) বা (b) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) (i) Prove that the necessary and sufficient condition that the differential equation

$Mdx + Ndy = 0$ be exact is that $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ where M and N are functions of x and y.

M আৰু N, x আৰু y ৰ ফলন হলে প্ৰমাণ কৰা যে $Mdx + Ndy = 0$ অৱকল সমীকৰণ যথাৰ্থ হোৱাৰ এটা প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হল $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ।

(ii) Solve by the method of variation of parameters $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$.

$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$ অৱকল সমীকৰণটো প্ৰাচল পৰিবৰ্তনৰ হাৰ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা।

(b) (i) Test for exactness and hence solve the differential equation

$$(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x + y)^2\,dy = 0$$

দেখুওৱা যে

$$(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x + y)^2\,dy = 0$$

অৱকল সমীকৰণটো যথাৰ্থ আৰু সমাধান কৰা।

Contd.

(ii) Solve by the method of undetermined co-efficients

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 8e^{2x}$$

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটো অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা।

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 8e^{2x}$$

5. Answer **either** part *(a)* **or** *(b)* : 5+5=10

(a) বা *(b)* অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) *(i)* If u_1 and u_2 are solutions of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

where P and Q are continuous on an open interval (a,b), then the Wronskian $W(u_1, u_2)(x)$ is given by

$$W(u_1, u_2)(x) = Ce^{-\int Pdx} (\neq 0)$$

where C is a constant.

u_1 আৰু u_2 $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান আৰু P, Q (a, b) অন্তৰালত অৱিচ্ছিন্ন হ'লে Wronskian $W(u_1, u_2)(x)$ ক তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰা

$$W(u_1, u_2)(x) = Ce^{-\int Pdx} (\neq 0)$$

য'ত C এটা ধ্ৰুৱক।

(ii) If the population of a country doubles in 50 years, in how many years will it treble under the assumption that the rate of increase is proportional to the member of inhabitants.

এখন দেশৰ জনসংখ্যা ৫০ বছৰত দুগুণ হয়। যদিহে জনসংখ্যা বৃদ্ধিৰ হাৰ জনসংখ্যাৰ সমানুপাতিক। কিমান বছৰত দেশখনৰ জনসংখ্যা তিনিগুণ হ'ব?

(b) (i) Show that the Wronskian of the functions x^2, $x^2 \log x$ is non zero. Determine the differential equation having them as independent solution.

দেখুওৱা যে x^2, $x^2 \log x$ ফলনৰ Wronskian অশূন্য। এই স্বতন্ত্ৰ সমাধান ব্যৱহাৰ কৰি অৱকলন সমীকৰণ গঠন কৰা।

(b) (ii) The number of bacteria in a yeast culture grows at a rate which is proportional to the number present. If the yeast bacteria triples in 1 hour, find the number of bacteria which will be present at the end of 5 hours.

ইষ্ট কালচাৰ পৰীক্ষা এটাত বেক্‌টেৰীয়াৰ বৃদ্ধিৰ হাৰ তাত থকা বেকটেৰীয়াৰ সমানুপাতিক। যদিহে ইষ্টখিনিৰ বেক্‌টেৰীয়া ১ ঘন্টাত তিনিগুণ বৃদ্ধি হয়। তেন্তে ৫ ঘন্টাৰ পিছত ইষ্টত থকা বেক্‌টেৰীয় উলিওৱা।